ЛИТЕРАТУРА

1. Фомин В. М. *Высокоскоростное взаимодействие тел.* – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 600 с.

2. Forrestal M. J. *Penetration into ductile metal targets with rigid spherical-nose rods* // Int. J. Impact Engng. – 1995. – V. 16. – No 5/6. — P. 699-710.

3. Котов В. Л. *Исследование применимости автомодельного решения задачи о расширении сферической полости в сжимаемой среде для определения давления на поверхность контакта "ударник – грунт"* // Пробл. прочн. и пласт.: Межвуз. сб. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2008. – Вып. 70. – С. 123-130.

4. Сагомонян А. Я. *Проникание.* – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 299 с.

А. А. Тихонова (Ильина)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

nastya-il@mail.ru

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ПОДОБЛАСТЕЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Рассматривается задача Дирихле для уравнения

$$Ku \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad (x,y) \in D, \tag{1}$$

$$u|_{\partial \overline{D}} = 0, \tag{2}$$

где область $D \equiv (0,1)^2$, f — заданная, u — искомая периодические функции.

В работах [1 – 3] было построено приближенное решение задачи (1) – (2) с помощью метода коллокаций, построенного по тригонометрической системе. Здесь строится, по аналогии с [1], [3], приближенное решение методом подобластей.

На $[0,1/2]$ выберем систему равноотстоящих узлов, расположенных в порядке возрастания: $x_i = i/(2n)$, $i=\overline{0,n}$. Приближенное решение будем искать в виде тригонометрического полинома по переменной x:

$$u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} C_k(y)\sin(\pi kx).$$

Неизвестные параметры $\{C_k(y)\}_1^n$ полинома определим из условий метода подобластей

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (Ku_n(x,y)-f(x,y))dx=0,\quad j=\overline{0,n-1},\quad y\in(0,1).$$

Эти условия приводят к системе краевых задач для определения параметров $\{C_k(y)\}_1^n$:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\sum_{k=1}^{n}[C_k''(y)-\pi^2k^2C_k(y)]\sin(\pi kx)-f(x,y)\right]dx=0,$$

$$j=\overline{0,n-1},\ y\in(0,1), \tag{3}$$

$$C_k(0)=C_k(1)=0,\quad k=\overline{1,n}.$$

Рассмотрим вопросы однозначной разрешимости системы (3) для двух случаев.

1. f — нечетная функция. Рассмотрим оператор Π_n метода подобластей (см., например, [4]), определяемого из условий

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x,y)dx=\int_{x_j}^{x_{j+1}} (\Pi_n^x f)(x,y)dx,\quad j=\overline{1,n-1}.$$

На весь промежуток $(0,1)$ полином $\Pi_n^x f$ задаем нечетным образом. Тогда система (3) примет вид

$$\sum_{k=1}^{n}[C_k''(y) - \pi^2 k^2 C_k(y)] \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \sin(\pi k x)dx -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} C_k^x(\Pi_n^x f) \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \sin(\pi k x)dx = 0,$$

$$j = \overline{0, n-1},\ y \in (0,1),\ C_k(0) = C_k(1) = 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

Последнее приводит к следующей системе:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left[C_k''(y) - \pi^2 k^2 C_k(y) - C_k^x(\Pi_n^x f)\right] \times$$

$$\times \left[\sin\left(\pi k \frac{x_{j+1} - x_j}{2}\right) \times \sin\left(\pi k \frac{x_{j+1} + x_j}{2}\right)\right] = 0,$$

$$j = \overline{0, n-1},\ y \in (0,1),\ C_k(0) = C_k(1) = 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

Эта система распадается (см., например, [5]) на краевые задачи

$$C_k''(y) - \pi^2 k^2 C_k(y) = C_k^x(\Pi_n^x f) \equiv \widetilde{f}_k(y), \quad 0 < y < 1,$$

$$C_k(0) = C_k(1) = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Каждая из задач (6) имеет единственное решение

$$C_k(y) = \int\limits_0^1 G_k(y,s)\widetilde{f}_k(s)ds,$$

где $G_k(y,s)$ — функция Грина. Приближенное решение запишется в виде

$$u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \sin \pi k x \int\limits_0^1 G_k(y,s)\widetilde{f}_k(s)ds.$$

Таким образом, имеет место

Теорема. *Если функция $f \in L_2$ нечетна по x, то краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений* (3) *однозначно разрешима при любых натуральных n. При этом приближенное решение $u_n^*(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(y)\sin(\pi kx)$ сходится к точному $u^*(x,y)$ со скоростью*

$$\|u^*(x,y) - u_n(x,y)\|_{L_2} = O\{E_n^x(f)_2\},$$

где $E_n^x(f)_2$ — наилучшее частное среднеквадратическое приближение функции $f(x,y)$ по переменной x тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

2. f — четная функция. Тогда приближенное решение по x на $[0,1]$ имеет вид

$$u_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(y)\cos(\pi kx),$$

а функция f раскладывается по косинусам

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^x(f)\cos(\pi jx),$$

где $\{\beta_j^x(f)\}$ — коэффициенты Фурье по переменной x функции $f(x,y)$ по тригонометрической системе $\{\cos(\pi jx)\}$. В этом случае получим следующие соотношения:

$$\alpha_0(y)(x_{j+1} - x_j) + \sum_{k=1}^{n-1}[C_k''(y) - \pi^2k^2C_k(y)] \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \cos(\pi kx)dx =$$

$$= \beta_0^x(\Pi_n^x)(x_{j+1} - x_j) + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k^x(\Pi_n^x f) \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \cos(\pi kx)dx,$$

$$j = \overline{0, n-1}, \ y \in [0,1].$$

После преобразований придем к системе

$$\alpha_0(y)(x_{j+1}-x_j)+\sum_{k=1}^{n-1}[C_k''(y)-\pi^2k^2C_k(y)]\times$$

$$\times\left[2\sin\left(\pi k\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\right)\times\cos\left(\pi k\frac{x_{j+1}+x_j}{2}\right)\right]=$$

$$=\beta_0^x(\Pi_n^x)(x_{j+1}-x_j)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k^x(\Pi_n^x f)\left[2\sin\left(\pi k\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\right)\times\cos\left(\pi k\frac{x_{j+1}+x_j}{2}\right)\right],$$

$$j=\overline{0,n-1},\ y\in[0,1].$$

Поскольку узлы x_j, $j=\overline{0,n}$, — равноотстоящие, то $\sin\left[\frac{(x_{j+1}-x_j)\pi k}{2}\right]=\sin(\pi k/n)$ зависит лишь от параметра k. Поэтому снова имеем систему вида (4) и приближенное решение вида

$$u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\cos(\pi kx)\int_0^1 G_k(y,s)\widetilde{f}_k'(s)ds,$$

где $\widetilde{f}_k'$ строится по аналогии с $\widetilde{f}_k$.

Из сказанного следуют также однозначная разрешимость системы (5) и сходимость приближенного решения к точному в среднем, если функция $f(x,y)$ — четная по x.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпиловская Э. Б. *О сходимости метода коллокации для некоторых граничных задач математической физики* // Сиб. матем. журнал. – 1963. – Т. 4. – № 3. – С. 632-640.

2. Гайфуллина Л. П. *О методе коллокаций для одного класса уравнений в частных производных* // Изв. вузов. Матем. – 1980. – № 4. – С. 18 -23.

3. Тихонова А. А. (Ильина) *Об одном способе приближенного решения задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2009. – Т. 39 – С. 361-364.

4. Ермолаева Л. Б. *Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений методом подобластей* // Дисс.... канд. физ.-мат. наук. – Казань, 1987. – 154 с.

5. Березин И. С., Жидков Н. П. *Методы вычислений. Т. 1.* – М.: Физматлит, 1962. – 467 с.

П. И. Трошин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Paul.Troshin@gmail.com

АТТРАКТОР ПАРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В $\mathbb{C}$. ОБЗОР ОТКРЫТЫХ ВОПРОСОВ

Барнсли и Харрингтон (1985) рассмотрели аттракторы пары линейных отображений в $\mathbb{C}$, основное внимание уделяя ассоциированному с ними множеству Мандельброта. Несмотря на простоту определения, эти понятия вызвали череду интересных вопросов, часть из которых открыта до настоящего времени. Продвижение в этой области было сделано, в основном, в работах Бандта (1991, 1992, 2002, 2007, 2008) и Соломяка (1998, 2003, 2005).

Под парой линейных отображений в $\mathbb{C}$ мы понимаем систему итерированных функций (СИФ) следующего вида:

$$\begin{cases} f_0(z) = qz, \\ f_1(z) = qz + 1, \quad z, q \in \mathbb{C}, \quad 0 < |q| < 1. \end{cases} \tag{1}$$